MA2 – „písemná" přednáška 13.5.2020

Nevlastní Riemannův integrál

Nevlastní Riemannův integrál je další, a v naší „matematice" poslední rozšíření Riemannova jednorozměrného integrálu $\int_a^b f(x)dx$ (z matematiky „A1"). Nevlastní integrál překonává „dvě" „omezení" integrálu Riemannova – a to omezený interval, přes který integrujeme, a omezenost funkce, kterou integrujeme. Jistě pamatujete na nutnou podmínku existence $(R)\int_a^b f(x)dx$:

$$f \in R\langle a,b\rangle \Rightarrow f \text{ je funkce omezená v } \langle a,b\rangle$$

Které integrály nemohou být Riemannovy?

1) $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, např. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$,

   tj. integrál „přes" neomezený interval;

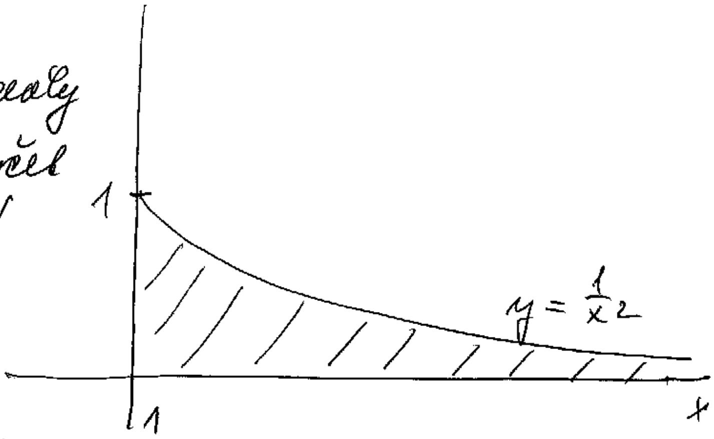
2) integrál z neomezené funkce, např.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

3) integrály z neomezených funkcí přes neomezený interval:

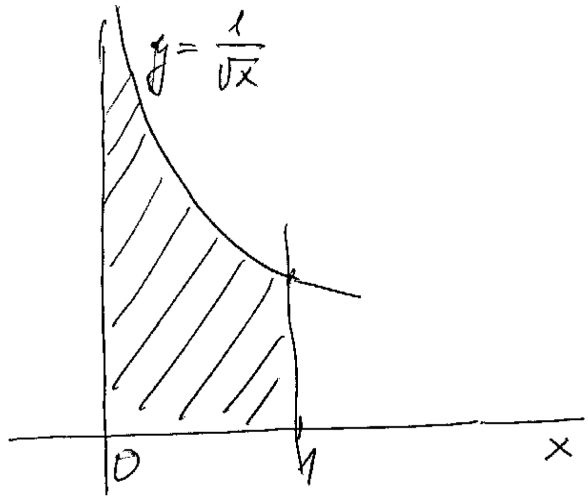
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx, \quad \int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}dx, \text{ atd.}$$

Představit si můžeme takové integrály „pro $f(x) \geq 0$ v $\langle a,+\infty)$ jako výpočet plochy pod grafem f, která má „nekonečně veliko(u)" základnu",



třeba pro $f(x)=\frac{1}{x^2}$ a $x \in \langle 1,+\infty)$,

nebo, v případě neomezené funkce, třeba $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0,1\rangle$, jako plochu, jejíž výška se „blíží" k nekonečnu.



A je již asi jasné, že abychom se „dostali" do nekonečna buď v oboru integrace, nebo při neomezenosti funkce v oboru, kde integrujeme, budeme využívat „opět limitu – nevlastní integrál bude zřejmě „umění" počítat integrály i limity.

A další příklady takových integrálů, které se vyskytují v aplikacích:
(i v původních verzích), plochy s nekonečnou základnou asi nebudeme muset „řešit" (ale pro představu to je snad „dobré")

- $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ – nazývá se Laplaceův, nebo Gaussův, nebo i Euler-Poissonův integrál
- $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ – Fresnelův integrál (také $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$) (častý ve fyzice)

- $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx$ – t.zv. „Gamma funkce",
  $(a>0)$ (nebo Eulerův integrál 2. druhu) – (zobecnění $n!$: $\Gamma(n) = (n-1)!$) – patří mezi t.zv. speciální funkce;

- $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$ – „Beta funkce" –
  $(a>0, b>0)$ – Eulerův integrál 1. druhu

- $F(x) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-xt}\,dt$ – $F(x)$ je t.zv. Laplaceova transformace funkce f (důležité pro řešení diferenciálních rovnic)

- $\hat{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-ix\xi}\,d\xi$, $x \in R$ – Fourierova transformace funkce f

1) <u>Jako první probereme podrobněji nevlastní integrál</u> $\underline{\int_a^\infty f(x)\,dx}$, „přes neomezený interval" $\langle a,+\infty)$, ostatní typy integrálů (21) přes interval $(-\infty, a\rangle$ a $(-\infty,+\infty)$ pak už probereme rychleji; a začneme definicí:

<u>Definice 1.</u> Nechť funkce $f \in R(\langle a,b\rangle)$ pro každé $b>a$; pak, existuje-li vlastní limita $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, tak definujeme

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

a říkáme, že $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje.

Jinak říkáme, že $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverguje.

Příklady:

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (konverguje), neboť

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$$

2) $$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(1-\underbrace{e^{-b}}_{(\to 0)}\right) = 1$$

tj. integrál konverguje a rovná se 1.

3) důležitý příklad !: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow p>1$

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx \underset{p\neq 1}{=} \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\,x^{1-p}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{1-p}-1\right) \in R$$

$\Leftrightarrow 1-p<0 \Leftrightarrow 1<p$

pro $p=1$: $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln b = +\infty$,

tj. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverguje.

4) $$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx \underset{\substack{\text{substituce}\\ \ln x = t}}{=} \lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b}\frac{1}{t^2}\,dt =$$

konverguje:

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\underbrace{\frac{1}{\ln b}}_{\to 0}+\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2} \in R$$

5) Ale u $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, nebo $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, takto vyšetřit konvergenci (resp. divergenci) neumíme, neboť primitivní funkce „neumíme" vyjádřit pomocí elementárních funkcí, tedy nevyjádříme $\int_0^b e^{-x^2}dx$ tak, abychom mohli „vypočítat" limitu $\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x^2}dx$ a tak rozhodnout o konvergenci (či divergenci), podobně je to i s integrálem $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

A toto bude pro nás nové, a zopakujeme si podobné úvahy i v průběhu poslední přednášky o nekonečných řadách

T.zv. kritéria konvergence si ukážeme, až poté, co si budeme formulovat vlastnosti nevlastních integrálů (nevlastních s neomezeným oborem integrace) a definujeme i ty ostatní typy. Ale aspoň pro představu - když budeme „vidět" $\int^\infty e^{-x^2}dx$ jako plochu mezi osou x a grafem fce $f(x) = e^{-x^2}$, tak od $x=1$ je určitě $e^{-x^2} \leqq e^{-x}$, a $\int_1^\infty e^{-x}dx$ je konečný (příklad 2, i s $x=0$)

tedy plocha „pod" grafem „menší" funkce bude asi také „menší", tj. konečná. A toto „zpřesníme", a budeme umět rozhodovat o tom, zda limita $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$ bude konečná, či ne, i bez výpočtu této limity - velice užitečná „dovednost"!

A nyní – vlastnosti $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (budeme psát stručněji $\int_a^\infty f$):

1) $\int_a^\infty f$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_\alpha^\infty f$ konverguje pro každé $\alpha > a$ a platí:

$$\int_a^\infty f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^\infty f$$

a obráceně:

$\int_\alpha^\infty f$ konverguje a $f \in R(a,\alpha) \Rightarrow \int_a^\infty f$ konverguje

2) $\int_a^\infty f$ konverguje i $\int_a^\infty g$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f+g$ konverguje i

$\int_a^\infty cf$ konverguje, $c \in \mathbb{R}$, a $\int_a^\infty f+g = \int_a^\infty f + \int_a^\infty g$, $\int_a^\infty cf = c\int_a^\infty f$

(plyne z vět o limitách)

3) $g \leq f \leq h$ v $\langle a,+\infty)$, $\int_a^\infty g$, $\int_a^\infty f$, $\int_a^\infty h$ konvergují $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^\infty g \leqq \int_a^\infty f \leqq \int_a^\infty h$$

(opět plyne z vět o „uspořádání" limit)

Analogicky k definici konvergence $\int_a^\infty f(x)dx$ se definuje konvergence i $\int_{-\infty}^a f(x)dx$:

<u>Definice 2.</u> Je-li $f \in R(c,a)$ pro každé $c<a$, a existuje-li limita $\lim\limits_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx \in R$, pak definujeme $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim\limits_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx$ a říkáme, že $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ konverguje. Jinak říkáme, že $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ diverguje.

A poslední případ ze skupiny „1)": $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ – zde se musí dát pozor!

<u>Definice 3.</u> Nechť konvergují integrály $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ i $\int_a^\infty f(x)dx$ pro nějaké $a\in R$. Pak říkáme, že konverguje i $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx.$$

Jinak říkáme, že $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ diverguje.

<u>Poznámky k definici 3:</u>

1. Jestliže $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ konverguje, pak pro lib. $b\in R$ konvergují i $\int_b^\infty f(x)dx$ i $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ a opět je $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx$,

tedy <u>definice 3) je „rozumná", nezávisí na tom, jaké „máme"</u> $\underline{\underline{a}}$.

Zkusme si to dokázat (jako „cvičení") – nechť $a<b$:

nechť konverguje

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{, pak } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx + \lim_{d\to\infty}\int_a^d f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx + \lim_{d\to\infty}\left(\int_a^b f(x)dx + \int_b^d f(x)dx\right)$$

$$= \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx + \underbrace{\int_a^b f(x)dx + \lim_{d\to+\infty}\int_b^d f(x)dx}_{+} = \underbrace{}_{\in R}$$

$$\underbrace{\lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)dx}_{\in R} + \underbrace{\lim_{d\to\infty}\int_b^d f(x)dx}_{\in R} = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx \quad \text{(cbd)}$$

(analogicky lze důkaz „udělat" i pro $b<a$)

2. Proč není definice $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$?

Příklad: kdyby:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{1+x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{2x}{1+x^2}dx = \lim_{a\to\infty} 0 = 0$$

(neboť $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ je lichá v R, tj. $\int_{-a}^{a}\frac{2x}{1+x^2}dx=0$, nebo přímo lze i zjistit výpočtem: $\left[\ln(1+x^2)\right]_{-a}^{a}=0$

ale $\int_0^{\infty}\frac{2x}{1+x^2}dx =$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{2x}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\ln(1+b^2) = +\infty \,!$$

A nebyla by asi „rozumná" taková definice konvergence $\int_{-\infty}^{+\infty} f$, tedy by $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ konvergoval, ale $\int_{0}^{\infty} f$ divergoval (integrál přes „část" intervalu $(-\infty,+\infty)$ by byl nekonečný, ale přes celý interval $(-\infty,+\infty)$ konečný.

Nicméně, $\lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$ se zkoumá (často v aplikacích) a této limitě se většinou říká „střední hodnota" $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

A nyní

<u>Kriteria konvergence</u> (pro $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, a tedy i $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$) –

– t.j. „jak zjistit, zda $\lim\limits_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$ (resp. $\lim\limits_{b\to-\infty}\int_{b}^{a} f(x)dx$) je konečná, nebo ne, bez výpočtu $\int_{a}^{b} f(x)dx$ $(b>a)$ ($\int_{b}^{a} f(x)dx$),

1) <u>Věta:</u> <u>Nutná podmínka konvergence</u> $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ (pro $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ analogicky)

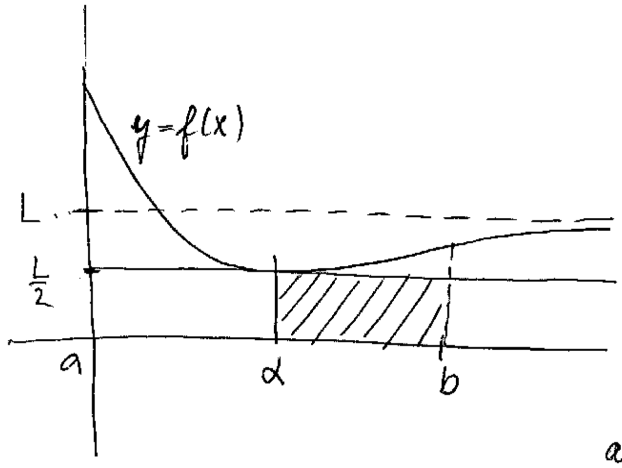
Jestliže $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ konverguje, pak $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(tj. odtud: Je-li $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L\neq 0 \Rightarrow \int_{a}^{\infty} f(x)dx$ diverguje)

<u>Zkusme tuto větu i dokázat:</u>

Předpokládejme, že $L>0$; pak platí: (z definice $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$)

ke $K=\frac{L}{2}$ existuje $\alpha>0$ tak, že $f(x) > L-\frac{L}{2}=\frac{L}{2}$ pro $\forall x>\alpha$:



Vezměme $b > \alpha$; pak

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^b f(x)dx$$

ale $\displaystyle\int_\alpha^b f(x)dx \geq \frac{L}{2}(b-\alpha)$,

tedy $$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \Big(\underbrace{\int_a^\alpha f(x)dx}_{(\in R)} + \underbrace{\tfrac{L}{2}(b-\alpha)}_{\xrightarrow[b\to\infty]{}\infty}\Big) = \infty \;\; ! ,$$

tedy, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ diverguje.

2) <u>Postačující podmínky konvergence</u> $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$:

tj. tedy „něco" víme o konečnosti nebo nekonečnosti limity, i když limitu „neumíme" spočítat?

<u>Co víme o existenci a konečnosti limit – z „teorie" limit funkcí?</u>

1. f je neklesající (nerostoucí) funkce v $\langle a,+\infty)$ $\Rightarrow$ existuje $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

2. Je-li f neklesající v $\langle a,+\infty)$, f je shora omezená, pak $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in R$;
   není-li f shora omezená v $\langle a,+\infty)$, pak $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   (analogicky pro nerostoucí funkci v $\langle a,+\infty)$:
   je-li f zdola omezená, pak $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in R$,
   není-li f zdola omezená, pak $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$)

A jak lze tuto větu o limitě monotónní funkce využít při vyšetřování konvergence nevlastních integrálů?

1) Vezměme si $f \in R(a,b)$ pro $b>a$ a $f(x) \geqq 0$ v $\langle a,+\infty)$;

pak $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ je neklesající funkce v $\langle a,+\infty)$, neboť:

je-li $a<b_1<b_2$, pak $\int_a^{b_2} f(x)dx = \int_a^{b_1} f(x)dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \geqq \int_a^{b_1} f(x)dx$,

neboť je-li $f(x) \geqq 0$ v $\langle b_1, b_2 \rangle$, je $\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \geqq 0$!,

tedy, pro lib. $b_1 < b_2$ je $F(b_1) \leq F(b_2)$

2) je-li $f(x) \leqq g(x)$ v $\langle a,+\infty)$, $\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$

$(f, g \in R(\langle a,b\rangle),\ \forall b>a)$

a jestliže $\int_a^\infty g(x)dx$ konverguje, tj. $\lim_{x\to b} \int_a^b g(x)dx \in R$, je

funkce $G(b) = \int_a^b g(x)dx$ shora omezená, tedy, protože

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx = G(b),$$

je i $\int_a^b f(x)dx = F(b)$ shora omezená funkce proměnné b,

a navíc neklesající, tedy existuje vlastní limita

$$\lim_{b\to\infty} F(b) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx$$

tedy $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje.

A tak jsme dokázali tuto větu:

<u>Věta (srovnávací kritérium konvergence</u> $\int_a^\infty f(x)dx$):

Nechť 1) $f, g \in R(\langle a,b\rangle)$ pro $\forall b>a$;

2) $0 \le f(x) \le g(x)$ v $\langle a,+\infty)$.

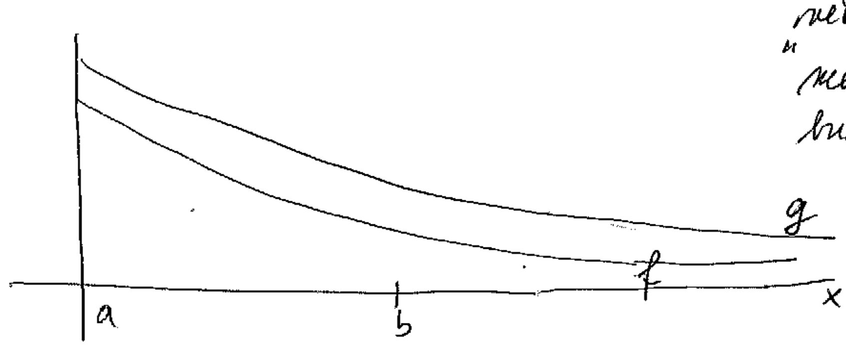
Pak platí: $\int_a^\infty g(x)dx$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje

(lze také „obráceně" aplikovat :

$\int_a^\infty f(x)dx$ diverguje $\Rightarrow$ $\int_a^\infty g(x)dx$ diverguje)

<u>A jak si to asi „lze představit"</u> :

když plocha „pod" funkcí „větší" je konečná, i pod „menší" (nezápornou) funkcí bude plocha (mezi grafem a osou x) konečná.



<u>Příklady</u> :

1) $\int_0^\infty \frac{x-1}{x+1}\,dx$ diverguje, neboť $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$

2) abychom mohli při vyšetřování konvergence $\int_a^\infty f(x)dx$ užít srovnávací kritérium, potřebujeme „zásobu" funkcí, jejichž integrály umíme a „můžeme užít ke srovnání" : jsou to

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$: $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $p>1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}\,\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^b \in R \Leftrightarrow p>1$$

$p \neq 1$

(pro $p \geqq 0$ je i $\lim_{p\to\infty}\frac{1}{x^p} \neq 0$!)

a $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b = +\infty$

3) $\int_1^\infty \frac{1}{x^8+1}\,dx$ konverguje, neboť $\frac{1}{x^8+1} \leqq \frac{1}{x^8}$ pro $x \geqq 1$,

a $\int_1^\infty \frac{1}{x^8}\,dx$ konverguje (dle př. 2);

$\int_0^\infty \frac{1}{x^8+1}\,dx$ konverguje, neboť $\int_1^\infty \frac{1}{x^8+1}\,dx$ konverguje

(„vlastnost" 1)

4) $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx$ diverguje, neboť $\frac{1}{\sqrt{x}-1} \geqq \frac{1}{\sqrt{x}}$ v $\langle 2,+\infty)$

a (dle př. 2) $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverguje.

5) ale $\int_2^\infty \frac{1}{x^8-1}\,dx$ – asi konverguje, neboť $\frac{1}{x^8-1} \approx \frac{1}{x^8}$ pro $x \to +\infty$,

ale „odhad nemáme" – $\frac{1}{x^8-1} \geqq \frac{1}{x^8}$ pro $x \in \langle 2,+\infty)$,

a z konvergence integrálu menší" funkce nemůžeme „nic soudit" o konvergenci (divergenci) integrálu z funkce „větší".

Ale když „cítíme", že pro $x \to +\infty$ je $\frac{1}{x^8-1}$ skoro $\frac{1}{x^8}$, jak toto přesněji vyjádřit, abychom mohli srovnání opět využít k vyšetřování konvergence $\int_a^\infty f(x)dx$? Vzpomeňme si opět na limity a jejich užití – „rychlost" funkcí $f(x), g(x)$, které obě měly v $+\infty$ (nebo i „jinde") nulové limity, tak rychlost, se kterou „šly" funkce k nule, jsme porovnávali pomocí limity podílu – když $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ „$= \frac{0}{0}$" $= A \in \mathbb{R}$, pak jsme odtud usuzovali, že rychlosti konvergence f a g k nule v $+\infty$ jsou srovnatelné („řádově" stejné) (když $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ „$= \frac{0}{0}$" $= 0$, tak f byla „řádově" menší, a obráceně, když $\lim\limits_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$, pak ta „menší" nula byla ve jmenovateli. A odtud teď pro použití jednodušší srovnávací kritérium:

Věta (limitní srovnávací kritérium)

1) nechť $f, g \in R(\langle a,b\rangle)$ pro $\forall b>a$, $f(x) \geq 0$ a $g(x) > 0$ v $\langle a, +\infty)$;

2) nechť $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$;

Pak, je-li a) $A > 0$, tak $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_a^\infty g(x)dx$ konverguje;

b) $A = 0$, tak $\int_a^\infty g(x)$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_a^\infty f(x)$ konverguje;

c) $A = +\infty$, tak $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_a^\infty g(x)$ konverguje.

Důkaz (naznačení důkazu pro zájemce, ale číst nemusíte)

2. předpoklad věty:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \ (>0, \text{nebo i} =0) \overset{\text{definice}}{\equiv}$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists x_0>0\ \forall x>x_0: \quad A-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A+\varepsilon \quad |\ g(x)>0$$

$$(A-\varepsilon)g(x) < f(x) < (A+\varepsilon)g(x) \quad \text{v } \langle x_0,+\infty)$$

a) $A>0$, zvolme $\varepsilon = \frac{A}{2}$, pak $\frac{A}{2}g(x) < f(x) < \frac{3A}{2}g(x)$ v $\langle x_0,+\infty)$

a protože $f(x)\geq 0$, $g(x)>0$ v $\langle x_0,+\infty)$, můžeme užít srovnávacího kritéria (nelimitního) a dostáváme:

(*) $\left(\int_a^\infty g(x)dx, \int_a^\infty f(x)dx \text{ budou konvergovat} \Leftrightarrow \int_{x_0}^\infty g(x)dx, \int_{x_0}^\infty f(x)dx \text{ konvergují} \right)$

$\int_{x_0}^\infty g(x)dx$ konverguje $\Rightarrow \int_{x_0}^\infty \frac{3A}{2} g(x)dx$ konverguje $\Rightarrow \int_{x_0}^\infty f(x)dx$ konverguje

a též $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje $\Rightarrow \int_{x_0}^\infty \frac{A}{2}g(x)dx$ konverguje $\Rightarrow \int_{x_0}^\infty g(x)dx$ konverguje,

tedy (i díky (*)) platí: $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje $\Leftrightarrow \int_a^\infty g(x)dx$ konverguje

b) $A=0$: máme „jen" odhad $0\leq f(x) < \varepsilon_0 g(x)$, $\varepsilon_0>0$ (pevně zvolené) v $\langle x_0,+\infty)$,

a tedy (opět ze srovnávacího kritéria plyne) (a z (*))

$$\int_a^\infty g(x)dx \text{ konverguje} \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx \text{ konverguje}.$$

c) <u>je-li $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$</u>, pak k lib. $K>0$ (zvolme ze pevné) existuje $x_0>0$ tak, že pro $x>x_0$ je $\frac{f(x)}{g(x)} > K$, a odtud opět, $(g(x)>0)$, že $f(x) > Kg(x)$ v $\langle x_0,+\infty)$, a dostáváme (srovnávací kritérium): $\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_{x_0}^{\infty} g(x)dx$ konverguje,

a tedy i (viz (*)) $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ konverguje.

<u>Příklady:</u>

1) „snadno" $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^8-1}dx$ <u>konverguje</u>, neboť $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x^8-1}}{\frac{1}{x^8}} = 1$,

a $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^8}dx$ konverguje.

2) $\int_{3}^{\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x^2-2}dx$ <u>konverguje</u>, neboť:

„odhad" $\frac{2\sqrt{x}}{x^2-2} \sim \frac{1}{x\sqrt{x}}$, „přesně"

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x^2-2}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-2} = 2 > 0,$$

a $\int_{3}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx$ konverguje ($p=\frac{3}{2}>1$ ve srovnávacím integrálu)

3) $\int_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$ <u>konverguje</u> – i srovnávací kritérium:

$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \leq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$ v $\langle 1,+\infty)$, $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ konverguje nebo limitním srovnáním: $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ pro $x \to \infty$, tj.:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\pi}{2} > 0, \text{ tj. } \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx \text{ konverguje,}$$

neboť $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konverguje;

4) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ diverguje, neboť

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ diverguje}$$

(a srovnávací limitní kritérium – $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konverguje, pokud $A\left(=\frac{\pi}{2}\right) > 0$)

(je ekvivalence pro $A > 0$)

5) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ konverguje, neboť stačí vyšetřit $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$,

a zde platí: $e^{-x^2} \le e^{-x}$ pro $x \ge 1$, a $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_1^\infty = 1$

(někdy se píše místo $\lim_{b\to\infty} \left[f(x)\right]_a^b = \left[f(x)\right]_a^\infty$)

nebo „limitní" srovnání

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \underset{\substack{\text{VLSF} \\ (t = x^2)}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} \underset{l'H}{=} 0,$$

a tedy, neboť $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konverguje, i $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ konverguje, a tedy i $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ konverguje.

6) $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,dx$ diverguje, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln x} \underset{l'H.}{=} +\infty$,

tedy, protože $\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverguje, tak i $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,dx$ diverguje

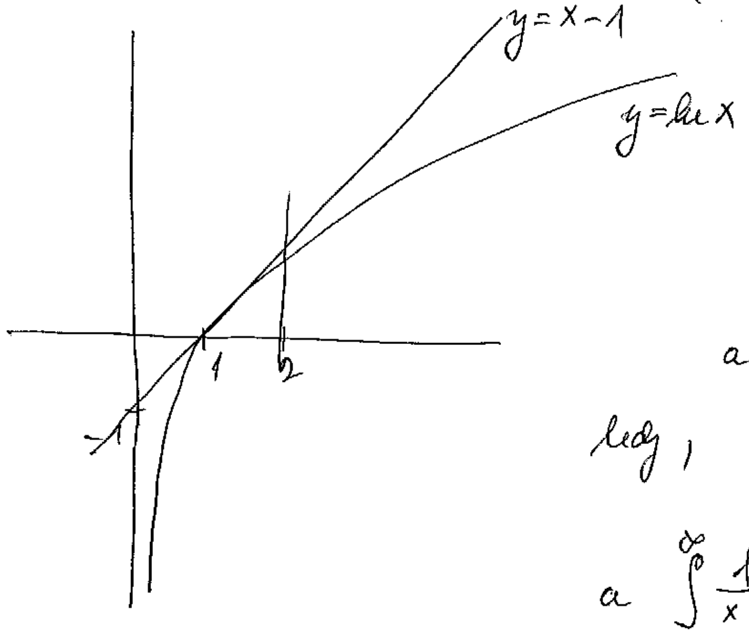
(tvrzení c) se užije; $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, pak platí:

$$\left(\int_a^\infty f \text{ konverguje} \Rightarrow \int_a^\infty g \text{ konverguje} \right) \Leftrightarrow \left(\int_a^\infty g \text{ diverguje} \Rightarrow \int_a^\infty f \text{ diverguje} \right)$$

7) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ konverguje, neboť $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\ln x}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} \underset{l'H.}{=} 0$)

a $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konverguje.

<u>Poznámka – v příkladu 6)</u> lze využít i odhad pro fci $\ln x$:
(a absolutní srovnání)



Jak je známo, $y = x-1$ je tečna ke grafu fce $y = \ln x$ v bodě $[1,0]$ a platí

$\ln x \leq x-1$ pro $x \geq 1$,

a $\ln x < x-1$ pro $x \geq 2$,

tedy, $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{1}{\ln x}$ v $x \geq 2$
($\ln x > 0$, $x-1>0$)

a $\int_2^\infty \frac{1}{x-1}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\ln|x-1|\right]_2^b = \infty$, tedy

(ze srovnávacího kritéria dostáváme, že) i $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,dx$ diverguje.

V předchozím vyšetřování konvergence integrálu $\int_a^\infty f(x)dx$ bylo zcela podstatné, že $f(x) \geqq 0$ v $\langle a, +\infty)$ (integrovatelnost f, tj. $f \in R(\langle a,b\rangle)$ pro $\forall b>a$, předpokládáme zde stále), a díky tomu existovala $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ (limita neklesající funkce)

a „jen" se rozhodovalo o tom, zda je tato limita vlastní, či nevlastní. Myslím, že je zřejmé, že stejně tak lze srovnávací kritéria užít i pro fce $f(x) \leqq 0$ v $\langle a, +\infty)$ (vyšetřujeme $\int_a^\infty (-f(x))dx$, a $\int_a^\infty (-f(x))dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_a^\infty f(x)dx$ konverguje)

Jakmile ale funkce f v intervalu $\langle a, +\infty)$ znaménko mění, pak funkce $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ není monotonní (obecně) a srovnávací kritéria nelze použít. <u>Ale platí (důležitá věta)</u>:

<u>Věta!</u> Jestliže $\int_a^\infty |f(x)|dx$ konverguje, pak konverguje i integrál

$\int_a^\infty f(x)dx$ (opět předpokládáme, že $f \in R(\langle a,b\rangle)$ pro $\forall b>a$, pak lze ukázat, že i $|f| \in R(\langle a,b\rangle)$ pro $\forall b>a$). a má tedy smysl vyšetřovat integrály nevlastní

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad a \quad \int_a^\infty |f(x)|dx \;)$$

<u>„Názvosloví"</u>: Pokud $f \in R(\langle a,b\rangle)$ pro $\forall b>a$, a $\int_a^\infty |f|$ konverguje, pak říkáme, že $\int_a^\infty f$ <u>konverguje absolutně</u>.

<u>Důkaz</u> (neznačení) – pro jednoduchost budeme předpokládat, že f je spojitá v $\langle a,+\infty)$, tedy i $|f|$ je spojitá v $\langle a,+\infty)$ a f i $|f|$ jsou pak integrovatelné v každém intervalu $\langle a,b\rangle$, $b>a$.

Definujme funkce $f^+(x) = \max(f(x),0)$, $x\in\langle a,+\infty)$
a $f^-(x) = \max(-f(x),0)$, $x\in\langle a,+\infty)$; } „obrázek" na straně 22 (podívejte se)

Dále je: $0 \le f^+(x) \le |f(x)|$, $0 \le f^-(x) \le |f(x)|$

($f^+(x)$ i $f^-(x)$ jsou spojité, a tedy i integrovatelné v $\langle a,b\rangle$, $b>0$)

a můžeme užít srovnávací kritérium:

$$\int_a^\infty |f(x)|dx \text{ konverguje} \Rightarrow \int_a^\infty f^+(x)dx \text{ i } \int_a^\infty f^-(x)dx \text{ konvergují};$$

<u>A nyní</u>: je $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, a tedy, konverguje i

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty f^+(x)dx - \int_a^\infty f^-(x)dx \quad \text{(což jsme měli ukázat)}.$$

<u>Poznámka:</u> Pokud je ale $\int_a^\infty |f(x)|dx$ integrál divergentní, může $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergovat – pak se takové konvergenci říká <u>neabsolutní konvergence integrálu</u> $\int_a^\infty f(x)dx$, ale je často velmi obtížné vyšetřit tuto konvergenci (nebo divergenci). Jsou také kritéria neabsolutní konvergence, ale dost náročná, nebudeme zde „probírat", zájemci najdou v doporučené literatuře (a pokročilé)

Příklad 1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$:

$\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$ konverguje, neboť: $\displaystyle\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ a $\displaystyle\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx}_{\text{konverguje}}$,

tedy, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ konverguje absolutně.

(stejně i $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ konverguje absolutně pro $p>1$)

2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konverguje (a tedy i $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$),

i když $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ diverguje , tedy,

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ je příklad neabsolutně konvergentního integrálu

---

Výpočet:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\sin x}{x}\,dx \overset{PP}{=} \lim_{b\to\infty}\Bigg(\underbrace{\left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^b}_{\to 0} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{-\cos x}{x^2}\,dx}\Bigg),$$

(věta o stažnících) a

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ konverguje

(srovnávací kritérium)

tedy, $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\sin x}{x}\,dx \in \mathbb{R}$!

Ale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ diverguje – dokážeme to „sporem“:

předpokládejme, že $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ konverguje, pak i $\displaystyle\left(\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}\right)$

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ konverguje, ale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x}\right)dx$; dále (podobně jako u $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$)

ukážeme, že $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ konverguje, tedy „musí“ konvergovat

i $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\left(\frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos 2x}{x}\right)dx$, ale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ je divergentní –

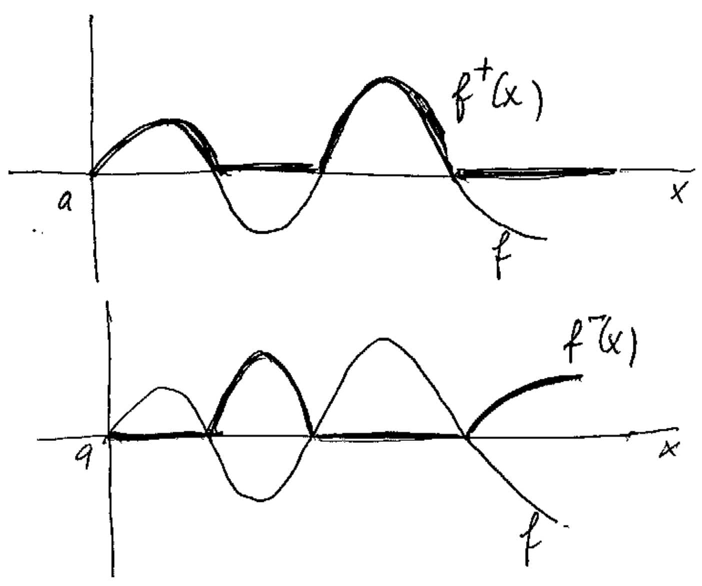
– tedy máme „spor“ a $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ je tedy divergentní!

A ještě poznámka k důkazu vět o absolutní konvergenci

$f(x)$ je dána na $\langle a,+\infty)$, pak tedy

$$f^+(x) = \max_{x\in\langle a,+\infty)} (f(x), 0)$$

$$f^-(x) = \max_{x\in\langle a,+\infty)} (-f(x), 0)$$



Kritéria konvergence a absolutní konvergence byla formulována pro nevlastní integrál $\int_a^{\infty} f(x)dx$, ale věřím, že je zřejmé, že tato kritéria lze formulovat analogicky i pro nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ – pro funkci $f(x) \in \mathcal{R}(\langle c,a\rangle)$, $\forall c<a$ a $f(x) \geq 0$ jde opět o limitu funkce $F(c) = \int_c^a f(x)dx$ pro $c \to -\infty$, $F(c)$ je opět monotonní (nerostoucí), pro vlastní limitu, tj. pro $\lim\limits_{c\to-\infty} F(c) \in \mathbb{R}$ je třeba omezenost shora na $(-\infty, a\rangle$ a opět lze buď „fungovat" srovnání „absolutní" nebo relativní v limitním srovnávacím kritériu. A bude stejně platit též implikace $\int_{-\infty}^{a} |f(x)|dx$ konverguje $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ konverguje, tj. absolutní konvergence. A pojem konvergence integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ je definován tak, že konverguje $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ i $\int_a^{\infty} f(x)dx$ a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

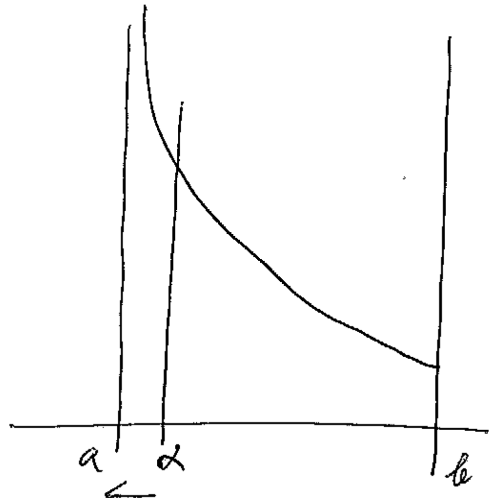
(v ostatních případech $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ diverguje), tak máme vše i pro integrál tento.

A nyní (už stručněji) vyšetříme (a nejprve definujeme) konvergenci integrálu z neomezených funkcí přes interval omezený, ale také zde přes interval neomezený.

<u>Nevlastní integrál z neomezených funkcí</u>

1) $\int_a^b f(x)dx$, kde $a<b$, $a,b\in R$ a f není omezená v okolí bodu a

(třeba jednodušší – $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$)



<u>Definice</u> a) Nechť $f \in R(\langle \alpha, b\rangle)$ pro $\forall\, a<\alpha<b$; ex-li vlastní limita $\lim\limits_{\alpha\to a+} \int_\alpha^b f(x)dx$ $(\in R)$, pak tuto limitu nazýváme

<u>nevlastní integrál z funkce f od a do b a značíme</u>
(také nevlastní integrál vzhledem dolní meze)

<u>$\int_a^b f(x)dx$</u> (a pokud existuje $(N)\int_a^b f(x)dx$, tak platí
$\int_a^b f(x)dx = (N)\int_a^b f(x)dx$).

(a říkáme, že integrál konverguje)

Jinak, tj. pokud limita je nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že $\int_a^b f(x)dx$ diverguje.

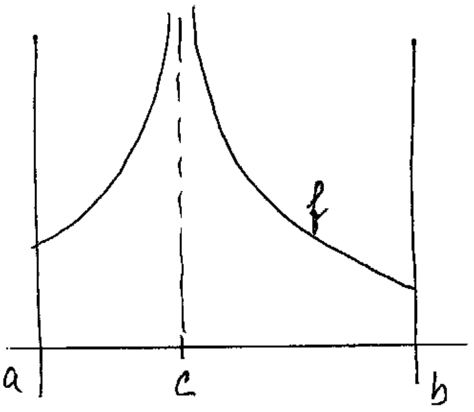
<u>Definice b)</u> Je-li funkce f neomezená u $b-$, $f\in R(\langle a,\beta\rangle)$ pro $\forall \beta$: $a<\beta<b$, pak, ex-li limita vlastní

$\lim\limits_{\beta\to b-}\int_a^\beta f(x)dx$, nazýváme tuto limitu nevlastním integrálem funkce f od <u>a</u> do <u>b</u> a říkáme, že integrál konverguje.

V ostatních případech říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)dx$ diverguje.

Zde také název – <u>nevlastní integrál vzhledem horní meze.</u>

Definice c)



$f \in R(\langle a,\gamma\rangle)$ pro $\forall\ a<\gamma<c$ a
$f \in R(\langle \delta, b\rangle)$ pro $\forall\ c<\delta<b$; pak
říkáme, že $\int_a^b f(x)dx$ konverguje, když
konvergují integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$

a pak $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Jinak říkáme, že $\int_a^b f(x)dx$ diverguje.

Příklady:

(1.) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ konverguje $\iff$ $p<1$ – opět „srovnávací" integrály (pro užití ve srovnávacím kritériu)
(nevlastní vlivem dolní meze)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\alpha\to 0+} \int_\alpha^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\alpha\to 0+}\left[\frac{-1}{(p-1)x^{p-1}}\right]_\alpha^1 = 1, \text{ je-li } p-1<0,$$
$p \neq 1$ tj. $\underline{p<1}$

(fce je neomezená u $0+$)

je-li $p-1>0$, je $\lim\limits_{\alpha\to 0+}\left[\frac{-1}{(p-1)x^{p-1}}\right]_0^1 = +\infty$,

je-li $p=1$, je $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{\alpha\to 0+}\int_\alpha^1 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{\alpha\to 0+}\left[\ln x\right]_\alpha^1 = +\infty$

(2.) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\beta\to 1-} \int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\beta\to 1-} \left[\arcsin x\right]_0^\beta = \frac{\pi}{2},$$

fce neomezená u 1– (integrál nevlastní vlivem horní meze)
tedy integrál konverguje

(3.) Analogicky k příkladu 1): $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$$ konverguje $\Leftrightarrow p<1$, a podobně
(nevlastní vlivem dolní meze)

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$ konverguje $\Leftrightarrow p<1$
(nevlastní vlivem horní meze)

"srovnávací" integrály pro $\int_a^b f(x)\,dx$ a f neomezená u $a+$ (resp. $b-$)

(4.) $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\alpha\to 0+}\int_\alpha^1 \ln x\,dx = \lim_{\alpha\to 0+}\left[x\ln x - x\right]_\alpha^1 =$$

f neomezená u $0+$ (integrál nevlastní vlivem dolní meze)

$$= \lim_{\alpha\to 0+}\left(-1-(\alpha\ln\alpha-\alpha)\right) = -1,$$

neboť $$\lim_{\alpha\to 0+}\alpha\ln\alpha = \text{„}0\cdot(-\infty)\text{"} = \lim_{\alpha\to 0+}\frac{\ln\alpha}{\frac{1}{\alpha}} = \text{„}\frac{-\infty}{\infty}\text{"} =$$

$$\underset{l'H.}{=} \lim_{\alpha\to 0+}\frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{1}{\alpha^2}} = \lim_{\alpha\to 0+}(-\alpha) = 0$$

(5) $$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \text{nebo} \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$$ – u těchto integrálů je funkce neomezená u obou mezí – chybí zatím definice!

Definice (nevlastní integrál vlivem obou mezí a, b)
Nechť je interval (a,b), $a; b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ a nechť $f \in R(\langle \xi, x_0 \rangle)$ pro $\forall \xi;\ a < \xi < x_0$ a $f \in R(\langle x_0, \eta \rangle)$ pro $\forall \eta:\ x_0 < \eta < b$; říkáme, že funkce f má konvergentní nevlastní integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, když konvergují $\int_a^{x_0} f(x)\,dx$ i $\int_{x_0}^b f(x)\,dx$, a pak
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx .$$
Jinak říkáme, že $\int_a^b f(x)\,dx$ diverguje.
(a opět, jako u $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ nezáleží na „výběru" bodu $x_0 \in (a,b)$)

a příklad 5):
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{?}{=} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{\text{nevlastní vlivem dolní meze}} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{\text{nevlastní vlivem horní meze}}$$

tyto integrály neumíme opět vyčíslit pomocí vzorců primitivní funkce – tedy budeme muset promyslet analogii se srovnávacím kritériem v případě $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ – za „chvilku", tak zatím jednodušší příklad:

$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konverguje, neboť

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\beta\to 1-}\left[\arcsin x\right]_0^{\beta} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\alpha\to -1+}\left[\arcsin x\right]_{\alpha}^{0} = \frac{\pi}{2}$$

a tedy, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$

a zde je vidět, že netedy toto zvládá Newtonův integrál (MA1):

$$(N)\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[\arcsin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$ – a hotovo!

<u>a kritéria konvergence</u> (pro $\int_a^b f(x)$ nevlastní v horní mezi, pro integrál $\int_a^b f(x)$ nevlastní v dolní mezi analogicky)

<u>Srovnávací kritérium:</u>

nechť 1) $f(x) \geq 0$ v $\langle a, b)$ $(a<b,\ a,b\in\mathbb{R})$, $f \in R(\langle a,\beta\rangle)$ pro $\forall \beta, a<\beta<b$ (tak předpokládat f spojitá v $\langle a,b)$, pak předpoklad R-integrovatelnosti je splněn)

2) $f(x) \leq g(x)$ v $\langle a, b)$:

Pak platí: $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konverguje $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje

(a tedy i $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverguje $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverguje)

Lineární srovnávací kritérium :

1) nechť $f, g \in R(\langle a, \beta\rangle)$ pro $\forall \beta,\ a<\beta<b$, $(a, b \in R)$
(stačí pro jednoduchost předpoklad spojitosti funkcí f a g v $\langle a, b)$)

2) nechť $f(x) \geqq 0$ a $g(x)>0$ v $\langle a, b)$;

Pak : a) $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx$ konverguje $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx$ konverguje ;

b) $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(x)dx$ konverguje $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ konverguje ;

c) $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx$ konverguje $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ konverguje

---

A analogicky lze formulovat srovnávací kritéria i pro integrál nevlastní vlivem dolní meze, a také pro funkce $f(x) \leqq 0$ v $\langle a, b)$ (nebo $f(x) \leq 0$ v $(a, b\rangle$)

A příklad 5) teď snad už budeme umět :

Nedá-li vyšetřit konvergenci $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, rozdělíli jsme vyšetřování na $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ a $\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

$$\int_0^{\frac12} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \; :$$

odhad: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sim 1$ pro $x \to 0+$, tedy

$\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \sim \ln x$ pro $x \to 0+$, a

$\int_0^1 \ln x\,dx$ konverguje, tedy „asi" náš integrál konverguje –

a přesně užitím limitního srovnání:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln x} = 1, \quad \int_0^{\frac12} \ln x\,dx \text{ konverguje (příklad 4.)} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} < 0,\ \ln x < 0 \text{ v } (0, \tfrac12\rangle \right) \Rightarrow \int_0^{\frac12} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \text{ konverguje};$$

a $\int_{\frac12}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$: můžeme vyšetřit $\int_{\frac12}^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\left(f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \text{ v } \langle \tfrac12, 1) \right)$

$$\text{a} \quad \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{-\ln x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 1-} (-\ln x) = 0, \quad \int_{\frac12}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \text{ konverguje} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{(limitní srovnávací kritérium)} \quad \int_{\frac12}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \text{ konverguje},$$

tedy, dle definice konverguje i $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Poznámka: lze také zjistit, že

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1-} \underbrace{\frac{\ln x}{x-1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x-1}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x}}}_{\to 0} = 0,$$

tedy funkce je omezená u $1-$ a integrál je nevlastní jen vlivem dolní meze

Další příklady:

(6.) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje, neboť buď

a) $\left.\begin{array}{l} 0 < \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{v} \quad (0, \frac{\pi}{2}\rangle \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \text{ konverguje} \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje

(srovnávací kritérium)

nebo b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\frac{\cos x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0+} \cos x = 1 \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \text{ konverguje} \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje

(limitní srovnávací kritérium)

(7.) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x}\,\sqrt{1+x^2}}\,dx$ konverguje –

(nevlastní vlivem horní meze):

neboť:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}\,\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}$

(pro limitní srovnání)

nebo platí $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ v $\langle 0, 1)$

(pro srovnávací kritérium)

2) a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ konverguje $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\,dx \text{ pro } p = \frac{1}{2}\right)$

Ještě jeden „druh" nevlastních integrálů uveďme –

$\int_a^\infty f(x)\,dx$, kde navíc funkce f není omezená v $(a,+\infty)$:

A opět definice: $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverguje, když konvergují integrály

$\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_b^\infty f(x)\,dx$, kde $b \in (a,+\infty)$.

(jinak $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverguje)

(Opět zde nezáleží na volbě b, a analogicky se definuje i

$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ pro funkci neomezenou v okolí bodu a)

Kritéria pro konvergenci obou typů integrálů v definici „máme".

Trochu „těžší" příklad na závěr:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$$

– 1) integrál nevlastní vlivem dolní meze:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^2-1} = +\infty$$

2) integrál nevlastní díky horní mezi $+\infty$

3) ještě $f(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$ není definována

v bodě $x=1$!

ale zde $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{\ln x}{x-1}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$,

tedy f je omezená v okolí bodu $x=1$, a navíc lze fci dodefinovat spojitě v $x=1$, tedy zde není problém a nyní: 1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ konverguje, neboť

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\ln x}{x^2-1}}{-\ln x} = +1\,, \quad \text{a} \quad \int_0^1 (-\ln x)\,dx \ \text{konverguje}$$

(příklad 4)

2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ též konverguje – srovnáme

srovnávací funkcí $g(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{x})^3}$ v $\langle 1,+\infty)$,

pak $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^2-1}}{\frac{1}{(\sqrt{x})^3}} = 0\,, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx \ \text{konverguje},$$

tedy (limitní srovnávací kritérium) i

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ konverguje,

a tedy, z 1) a 2) plyne, že $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ konverguje.

A ještě výpočet limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^2-1}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x \cdot x^{3/2}}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}}_{\to 1} = 0$$

$$\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \right)$$

Poznámka:

Užití integrace per partes a substituce při výpočtu (či vyšetření konvergence) nevlastních integrálů:

Integrace per partes: (např., ostatní případy analogicky)

$$\int_a^{\infty} f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^{\infty} - \int_a^{\infty} f(x)g'(x)\,dx ,$$

pokud aspoň dvě z limit mají smysl, předpokládáme $f'(x)$, $g'(x)$ spojité v $\langle a,+\infty)$

Substituce:

f je spojitá v $\langle a,b)$, $\varphi'(t)$ je spojitá v $\langle \alpha,\beta)$, $\varphi'(t)>0$ v $\langle \alpha,\beta)$, $\varphi(\langle \alpha,\beta)) = \langle a,b)$, $\lim\limits_{t\to\beta-}\varphi(t) = b$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

když konverguje aspoň jeden z integrálů.

Příklad:

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{1}{x^2}dx = dt \end{array} \right| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = 1$$

– konverguje, absolutně, neboť $\left|\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \frac{1}{x^2}$ v $\langle \frac{2}{\pi},\infty)$ a

$\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ konverguje

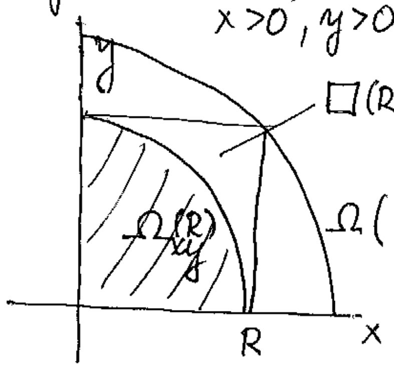
A jistě navíc – výpočet Laplaceova integrálu $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1) „Krásný" nápad: vezme se integrál

$$\iint_{\Omega_{xy}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \underset{\text{polární souřadnice}}{=} \int_{\Omega_{r,\varphi}} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi \underset{F.V.}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R e^{-r^2}\cdot r\,dr =$$

$\Omega_{xy} = \{[x,y];\ x^2+y^2 \le R,\ x>0,\ y>0\}$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^R\right) = -\frac{\pi}{4}\left(e^{-R^2}-1\right) = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$



2) další „nápad": $\displaystyle\iint_{\underbrace{\langle 0,R\rangle\times\langle 0,R\rangle}_{\square(R)}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \underset{F.V.}{=} \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$

3) a nyní je „vidět", že plochy (integrály lze tak vnímat) splňují: $\Omega(R) < S(\square(R)) < \Omega(\sqrt{2}R)$, tedy

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) < \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$$

a tedy když vezmeme limitu pro $R\to\infty$ a užijeme větu o strážnících, dostaneme (využití nevlastního integrálu)

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}} \le \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx \le \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

tedy $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$!